

28. Методы Ньютона и секущих для решения нелинейных уравнений

Рассмотрим функцию $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ и уравнение

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

Пусть x^* — вещественный корень этого уравнения, и определена его окрестность радиуса a , не содержащая других корней уравнения:

$$U_a(x^*) = \{x : |x - x^*| < a\},$$

причем заданная функция $f(x)$ определена на этой окрестности.

Будем считать, что начальное приближение $x^0 \in U_a(x^*)$ задано. Пусть в $U_a(x^*)$ существует и не обращается в ноль непрерывная первая производная функции $f(x)$:

$$f'(x) \neq 0, \quad x \in U_a(x^*).$$

Разложим $f(x^*)$ по формуле Тейлора в малой окрестности точки $x \in U_a(x^*)$:

$$f(x^*) = f(x) + (x^* - x)f'(x) + \dots$$

и отбросим в этом разложении величины, имеющие второй и выше порядок малости по $(x^* - x)$.

Заменив x^* на x^{n+1} и x на x^n , получим уравнение

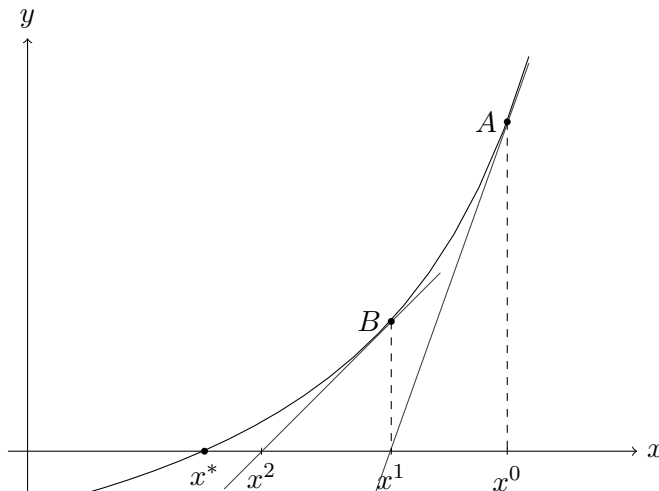
$$f(x^n) + (x^{n+1} - x^n)f'(x^n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Учитывая, что $f'(x^n) \neq 0$, и разрешив последнее уравнение относительно x^{n+1} , имеем:

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2)$$

Определение. Итерационный процесс поиска корня уравнения (1), задаваемый формулой (2), называется итерационным методом Ньютона.

Дадим геометрическую интерпретацию метода Ньютона. Рассмотрим точку $A(x^0, f(x^0))$. Определим первую итерацию x^1 рассматриваемого процесса как абсциссу точки пересечения с осью Ox касательной к функции $f(x)$ в точке A . Аналогично получаем значение x^2 как точку пересечения с осью Ox касательной к функции $f(x)$ в точке $B(x^1, f(x^1))$. Продолжая таким образом, на n -м шаге получаем значение x^n , приближающее корень x^* уравнения (1) с заданной точностью.



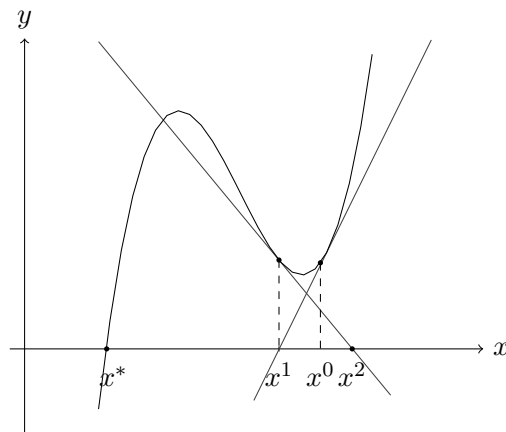
Выпишем уравнение касательной к функции $f(x)$ в точке x^n :

$$y - f(x^n) = f'(x^n)(x - x^n).$$

Очевидно, что значение x^{n+1} , найденное по формуле (2), представляет собой абсциссу точки пересечения с осью x касательной к кривой $y = f(x)$, проведенной через точку $(x^n, f(x^n))$.

Замечание. Итерационный метод Ньютона часто называют методом касательных.

Если не выполнено условие неравенства нулю производной функции $f(x)$ в области $U_a(x^*)$, то метод Ньютона может расходиться. На графике показан пример такого случая.



Замечание 1. Метод Ньютона является вычислительно сложным, поскольку на каждой итерации проводится вычисление значений производной функции $f(x)$, что является, вообще говоря, неустойчивым процессом.

Замечание 2. При решении задач на практике часто рассматривается модифицированный метод Ньютона, задаваемый формулой

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^0)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Преимущество этого метода перед классическим методом заключается в том, что в нем не требуется вычислять значения функции $f'(x)$ на каждой итерации. Однако при этом модифицированный метод Ньютона сходится медленнее классического метода Ньютона. Вопросы сходимости метода Ньютона излагаются в §4.

Метод секущих

Определение. Итерационный метод решения уравнения (1) называется одношаговым, если для нахождения $n + 1$ -й итерации корня x^{n+1} используется только n -я итерация x^n . Если для нахождения x^{n+1} используется не только x^n , но и предыдущие ей другие итерации, то метод называется многошаговым.

Ранее мы рассматривали одношаговые методы решения нелинейных уравнений — метод простых итераций и итерационный метод Ньютона. Рассмотрим многошаговый итерационный метод — метод секущих.

Запишем итерационный метод Ньютона для решения уравнения (1):

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x^0 \in U_a(x^*). \quad (10)$$

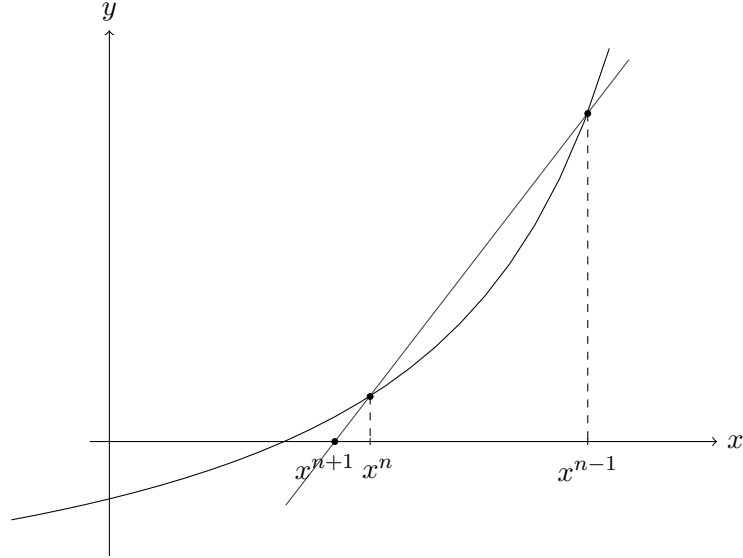
Заменим производную $f'(x^n)$ на соответствующий дискретный аналог $\frac{f(x^n) - f(x^{n-1})}{x^n - x^{n-1}}$ и подставим это отношение в уравнение (10).

Получим итерационный метод

$$x^{n+1} = x^n - \frac{(x^n - x^{n-1})f(x^n)}{f(x^n) - f(x^{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x^0, x^1 \text{ заданы.} \quad (11)$$

Определение. Итерационный процесс (11) задает двухшаговый метод решения нелинейных уравнений, называемый методом секущих.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию метода секущих.



Через точки $(x^{n-1}, f(x^{n-1}))$, $(x^n, f(x^n))$ проводится секущая. За новое значение x^{n+1} принимается абсцисса точки пересечения секущей и оси Ox . Иначе говоря, на отрезке $[x^{n-1}, x^n]$ функция $f(x)$ интерполируется полиномом первой степени, и за очередное приближение x^{n+1} принимается корень этого полинома.

Будем рассматривать итерационный метод Ньютона как метод простой итерации с функцией

$$S(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

При изучении сходимости метода простой итерации было замечено, что, если $|S'(x)| < 1$ при $x \in U_a(x^*)$, то он сходится. Предполагая, что функция $f(x)$ дифференцируема достаточное число раз, продифференцируем функцию $S(x)$:

$$S'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Так как x^* — корень уравнения (1), то $f(x^*) = 0$, и, следовательно, $S'(x^*) = 0$, и по непрерывности функции $S'(x)$ имеем $|S'(x)| < 1$, следовательно метод сходится.

Введем погрешность приближенного решения:

$$z^n = x^n - x^*.$$

Покажем, что связь между z^n и z^{n+1} квадратичная. Рассмотрим выражение для z^{n+1} :

$$z^{n+1} = x^{n+1} - x^* = S(z^n + x^*) - S(x^*). \quad (2)$$

Разложим $S(z^n + x^*)$ по формуле Тейлора и учтем, что $S'(x^*) = 0$:

$$z^{n+1} = S(x^*) + S'(x^*)z^n + \frac{1}{2}S''(\tilde{x}^n)(z^n)^2 - S(x^*) = \frac{1}{2}S''(\tilde{x}^n)(z^n)^2, \quad (3)$$

$$\tilde{x}^n = x^n + \theta z^n, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad |\theta| < 1.$$

Пусть функция $f(x)$ трижды непрерывно дифференцируема в окрестности $U_a(x^*)$. Тогда

$$S''(x) = \left(\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right)'.$$

Пусть существует постоянная $M > 0$ такая, что для любого $x \in U_a(x^*)$ выполняется неравенство

$$M \geq \frac{1}{2} |S''(x)|. \quad (4)$$

Из этого неравенства и уравнения (3) следует оценка

$$|z^{n+1}| \leq M|(z^n)^2|. \quad (5)$$

Домножим это неравенство на M и обозначим $v^n = M|z^n|$. Тогда получим, что

$$v^{n+1} \leq (v^n)^2.$$

Отсюда следует, что $v^n \leq (v^0)^{2^n}$, значит,

$$M|z^n| \leq (M|z^0|)^{2^n},$$

$$|z^n| \leq \frac{1}{M} (M|z^0|)^{2^n}.$$

Введем обозначение $q = M|z_0|$. Если $0 < q < 1$, то последовательность $\{z^n\}_{n=0}^\infty$ стремится к нулю:

$$z^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

и итерационный метод Ньютона сходится. Условие на q ($0 < q < 1$) будет выполнено, если $0 < |z^0| < \frac{1}{M}$, то есть $|x^0 - x^*| < \frac{1}{M}$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Пусть существует такая константа $M > 0$, для которой выполнена оценка

$$\frac{1}{2} |S''(x)| \leq M, \quad x \in U_a(x^*).$$

Тогда если начальное приближение x^0 выбрать в соответствии с условием

$$|x^0 - x^*| < \frac{1}{M},$$

то итерационный метод Ньютона сходится, и имеет место оценка:

$$|x^n - x^*| \leq \frac{1}{M} (M|x^0 - x^*|)^{2^n}.$$

Замечание 1. Если итерационный метод Ньютона сходится, то достаточно быстро. При наличии оценки вида (5) говорят о квадратичной сходимости метода.

Замечание 2. Из условий теоремы следует, что начальное приближение нужно выбирать достаточно близко к точному решению рассматриваемого уравнения.

Замечание 3. Другие рассмотренные нами методы (модифицированный метод Ньютона и метод секущих) обладают, по крайней мере, линейной сходимостью. Это следует из того, что если их записать в виде $x^{n+1} = S(x^n)$, то $S(x^*) = x^*$ и $S'(x^*) \neq 0$. Например, для модифицированного метода Ньютона $S'(x^*) = 1 - \frac{f'(x^*)}{f'(x^0)}$, и чем ближе взять x^0 к x^* , тем быстрее будет сходимость.

Важнейшей характеристикой итерационного метода является скорость сходимости последовательности x_k к x^* . Пусть для числовой последовательности x_k известно, что $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x^*| = 0$. Если существует такая постоянная c , $0 \leq c < 1$, что, начиная с некоторого номера, выполнены неравенства $|x_{k+1} - x^*| \leq c \cdot |x_k - x^*|$, то говорят, что x_k линейно сходится к x^* . Если существует такая последовательность c_k , что $c_k \rightarrow 0$ и, начиная с некоторого номера, выполнены неравенства $|x_{k+1} - x^*| \leq c_k \cdot |x_k - x^*|$, то говорят, что x_k сходится к x^* сверхлинейно. Если существуют такие постоянные $c \geq 0$, $p > 1$, что, начиная с некоторого номера, выполнены неравенства $|x_{k+1} - x^*| \leq c \cdot |x_k - x^*|^p$, то говорят, что x_k сходится к x^* с порядком p .

29. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Примеры методов Рунге-Кутты.

В этой главе рассматривается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)), & t > 0, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))^T$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) = (f_1(t, \mathbf{u}(t)), \dots, f_m(t, \mathbf{u}(t)))^T$.

Напомним теорему, гарантирующую существование и единственность решения задачи (1) в окрестности начальных данных.

Обозначим

$$|\mathbf{u}(t)| = \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t) + \dots + u_m^2(t)}.$$

Предположим, что функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ непрерывна в параллелепипеде

$$R = \{|t| \leq a, |\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(0)| \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

и удовлетворяет в R условию Липшица по второму аргументу, то есть

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| \leq L\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|,$$

для всех $(t, \mathbf{u}), (t, \mathbf{v}) \in R$.

При выполнении этих условий существует единственное решение $\mathbf{u}(t)$ задачи (1), определенное и непрерывное на некотором отрезке.

Доказательство этой теоремы основано на методе Пикара, который состоит в том, что дифференциальную задачу (1) заменяют эквивалентным интегральным уравнением

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(0) + \int_0^t \mathbf{f}(x, \mathbf{u}(x)) dx$$

и для этого интегрального уравнения доказывается сходимость последовательных приближений $\mathbf{u}_n(t)$, построенных по правилу

$$\mathbf{u}_{n+1}(t) = \mathbf{u}(0) + \int_0^t \mathbf{f}(x, \mathbf{u}_n(x)) dx. \quad (2)$$

Если функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{u})$ такова, что интеграл в правой части уравнения (2) легко вычисляется, то метод Пикара, безусловно, можно использовать для отыскания приближенного решения задачи (1). Однако найти этот интеграл в явном виде, как правило, не удастся.

В дальнейшем при построении и исследовании численных методов будем предполагать, что искомое решение задачи (1) $\mathbf{u}(t)$ существует, единственно и обладает требуемыми свойствами гладкости.

В настоящее время наибольшее распространение получили две группы численных методов решения задачи Коши:

1. Методы Рунге-Кутты;
2. Многошаговые разностные методы, наиболее известными из которых являются методы Адамса.

Приведем примеры таких методов, предполагая для простоты изложения, что система (1) состоит всего из одного уравнения. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u(t)), & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3)$$

Введем сетку по времени с постоянным шагом $\tau > 0$, то есть множество точек

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n \in \mathbb{Z}_+\},$$

и обозначим $u_n = u(t_n)$, $f_n = f(t_n, u_n)$. В дальнейшем точное решение задачи (1) будем обозначать буквой u , а приближенное решение — буквой y .

Пример 1. Пожалуй, наиболее простым методом решения задачи (3) является разностная схема (метод) Эйлера. Несмотря на всю простоту схемы, метод Эйлера часто используется на практике.

Метод Эйлера представляет собой разностное уравнение:

$$\begin{cases} \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_n, y_n), & t_n \in \omega_\tau \\ y_0 = u_0, & n \in \mathbb{Z}_+. \end{cases} \quad (4)$$

Эта схема является явной, так как значение численного решения в каждой следующей точке t_{n+1} , $n \in \mathbb{Z}_+$ находится по явной формуле:

$$y_{n+1} = y_n + \tau f_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Введем погрешность разностной схемы (4):

$$z_n = y_n - u_n, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Если мы получим оценку $\|z_n\| \leq M\tau$, где константа M не зависит от τ , то будем говорить, что решение разностной схемы Эйлера сходится к решению исходного уравнения (3) с первым порядком точности по τ .

По определению, погрешностью аппроксимации разностной схемы (4) на решении исходной задачи (3) (или невязкой) называется сеточная функция:

$$\psi_n = -\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + f(t_n, u_n). \quad (5)$$

Разложим u_{n+1} в ряд Тейлора в узле t_n :

$$u_{n+1} = u_n + \tau u'_n + O(\tau^2).$$

Тогда

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = u'_n + O(\tau).$$

Подставляя последнее выражение в равенство (5) получим:

$$\psi_n = -u'_n + f(t_n, u_n) + O(\tau).$$

Воспользовавшись тем, что $-u'_n + f(t_n, u_n) = 0$, так как выполнено исходное уравнение (3), окончательно получаем:

$$\psi_n = O(\tau).$$

Эта оценка означает, что разностная схема (4) аппроксимирует исходную задачу с первым порядком по τ . В дальнейшем покажем, что рассмотренная разностная схема будет сходиться к решению задачи (3) с первым порядком по τ .

Пример 2. Рассмотрим теперь двухэтапную разностную схему Рунге–Кутты (схему «предиктор–корректор»). В данной разностной схеме вводятся дополнительные точки, так называемые полуцелые слои:

$$t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + 0.5\tau, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Нахождение численного решения данной разностной схемы в каждой следующей точке t_{n+1} производится в два этапа:

$$t_n \longrightarrow t_{n+\frac{1}{2}} \longrightarrow t_{n+1}.$$

Выполним первый этап («предиктор») по схеме Эйлера:

$$\frac{y_{n+\frac{1}{2}} - y_n}{0.5\tau} = f(t_n, y_n). \quad (6)$$

Рассмотрим второй этап («корректор»):

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}), \quad (7)$$

где $y_0 = u_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Из уравнения (7) с учетом (6) следует

$$y_{n+1} = y_n + \tau f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_n + 0.5\tau f(t_n, y_n)). \quad (8)$$

Далее будет показано, что эта двухэтапная разностная схема имеет второй порядок точности по τ .

Пример 3. Двухшаговая разностная схема.

В приведенных выше примерах были рассмотрены одношаговые методы, в которых для вычисления нового значения y_{n+1} было использовано одно предыдущее значение y_n . При этом в методе Рунге–Кутты значения функции $f(t, u)$ вычислялись не только в точках сетки ω_τ , но и во внутренних точках отрезка $[t_n, t_{n+1}]$. Многошаговые разностные методы позволяют вычислить y_{n+1} , используя значения решения $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-m}$ и правой части $f_n, f_{n-1}, \dots, f_{n-m}$ в нескольких предыдущих точках $t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-m}$ сетки ω_τ . Значения правой части в промежуточных точках не используются.

Приведем пример многошагового метода. Для аппроксимации уравнения (1) в точке $t = t_{n+1}$ будем использовать три точки сетки, $t_{n-1} = (n-1)\tau$, $t_n = n\tau$, $t_{n+1} = (n+1)\tau$, а правую часть уравнения будем вычислять только в точках t_{n-1}, t_n .

Итак, рассмотрим разностное уравнение

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \sigma_1 f_{n-1} + \sigma_2 f_n \quad (9)$$

и подберем коэффициенты σ_1 и σ_2 так, чтобы погрешность аппроксимации на решении (1)

$$\psi_{n+1} = -\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + \sigma_1 f_{n-1} + \sigma_2 f_n \quad (10)$$

была величиной $O(\tau^2)$. Разложим функции, входящие в выражение для ψ_{n+1} по формуле Тейлора в окрестности точки t_{n+1} :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = u'_{n+1} - \frac{\tau}{2} u''_{n+1} + O(\tau^2),$$

$$\begin{aligned} f(t_n, u_n) &= f(t_{n+1} - \tau, u(t_{n+1} - \tau)) = f(t_{n+1} - \tau, u_{n+1} - \tau \frac{\partial u_n}{\partial t} + O(\tau^2)) = \\ &= f_{n+1} - \tau \frac{\partial f_{n+1}}{\partial t} - \tau \frac{\partial u_n}{\partial t} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial u} + O(\tau^2) = f_{n+1} - \tau \frac{\partial f_{n+1}}{\partial t} - \tau f_{n+1} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial u} + O(\tau^2) = \\ &= f_{n+1} - \tau u''_{n+1} + O(\tau^2), \end{aligned}$$

$$f(t_{n-1}, u_{n-1}) = f_{n+1} - 2\tau u''_{n+1} + O(\tau^2).$$

Подставляя эти разложения в выражение для погрешности аппроксимации (9), получим

$$\psi_{n+1} = -u'_{n+1} + (\sigma_1 + \sigma_2)f_{n+1} + \tau u''_{n+1}(0.5 - \sigma_2 - 2\sigma_1) + O(\tau^2).$$

Для того, чтобы ψ_{n+1} была величиной $O(\tau^2)$, достаточно потребовать

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 1, \quad 0.5 - \sigma_2 - 2\sigma_1 = 0.$$

Второе равенство будет выполнено если, например, положить $\sigma_1 = -0.5$, $\sigma_2 = 1.5$. Таким образом, приходим к следующей двухшаговой разностной схеме, имеющей второй порядок погрешности аппроксимации

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{3}{2}f_n - \frac{1}{2}f_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Чтобы начать счет по схеме (11), надо знать два начальных значения, y_0 и y_1 . Ясно, что $y_0 = u(0)$.

Величину y_1 можно вычислить с помощью какого-либо одношагового метода. Можно также использовать разложение

$$u(\tau) = u(0) + \tau \frac{\partial u(0)}{\partial t} + \dots = u(0) + \tau f(0, u(0)) + \dots$$

и положить $y_1 = u_0 + \tau f_0$.

Рассмотрим общий вид двухэтапного метода Рунге–Кутты для уравнения (3):

$$\begin{cases} \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \sigma_1 K_1 + \sigma_2 K_2, & n \in \mathbb{Z}_+ \\ y_0 = u_0, \\ K_1 = f(t_n, y_n), \quad K_2 = f(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau f(t_n, y_n)), \end{cases} \quad (12)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, a_2, b_{21} \in \mathbb{R}$ — некоторые числа, от выбора которых зависит как погрешность аппроксимации, так и точность численного решения.

Подставим значения K_1 и K_2 в первое уравнение системы (12):

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \sigma_1 f(t_n, y_n) + \sigma_2 f(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau f(t_n, y_n)).$$

Рассмотрим погрешность аппроксимации разностной схемы (12) на решении задачи (3):

$$\psi_n = -\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + \sigma_1 f(t_n, u_n) + \sigma_2 f(t_n + a_2\tau, u_n + b_{21}\tau f(t_n, u_n)). \quad (13)$$

Разложим u_{n+1} в ряд Тейлора в окрестности точки t_n :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = u'_n + \frac{\tau}{2}u''_n + O(\tau^2).$$

Далее разложим $f(t_n + a_2\tau, u_n + b_{21}\tau f_n)$ в окрестности точки (t_n, u_n) :

$$f(t_n + a_2\tau, u_n + b_{21}\tau f_n) = f(t_n, u_n) + a_2\tau \frac{\partial f_n}{\partial t} + b_{21}\tau f_n \frac{\partial f_n}{\partial u} + O(\tau^2).$$

Заметим, что в силу уравнения (3)

$$u'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Тогда погрешность аппроксимации ψ_n принимает вид:

$$\begin{aligned}\psi_n = & -u'_n - 0.5\tau \left(\frac{\partial f_n}{\partial t} + f_n \frac{\partial f_n}{\partial u} \right) + O(\tau^2) + \sigma_1 f(t_n, u_n) + \\ & + \sigma_2 \left(f(t_n, u_n) + \tau a_2 \frac{\partial f_n}{\partial t} + \tau b_{21} f_n \frac{\partial f_n}{\partial u} \right) + O(\tau^2).\end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\psi_n = -u'_n + (\sigma_1 + \sigma_2)f(t_n, u_n) + \tau \left((a_2\sigma_2 - 0.5)\frac{\partial f_n}{\partial t} + (b_{21}\sigma_2 - 0.5)f_n \frac{\partial f_n}{\partial u} \right) + O(\tau^2).$$

Чтобы получить оценку погрешности аппроксимации ψ_n со вторым порядком по τ , необходимо избавиться от слагаемых, содержащих τ в первой степени. Для этого потребуем выполнение следующих условий:

1. $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$ (это условие называется условием аппроксимации).
2. $\sigma_2 a_2 = \sigma_2 b_{21} = 0.5$.

Тогда погрешность аппроксимации этого метода имеет второй порядок малости по τ :

$$\psi_n = O(\tau^2).$$

В записи общего метода Рунге–Кутты используется несколько параметров, что обеспечивает широту класса описываемых этим методом разностных схем. Однако в двухэтапном методе Рунге–Кутты не имеет смысла пользоваться двумя параметрами σ_1 и σ_2 , так наилучшая оценка погрешности метода достигается при $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$, поэтому, как правило, в двухэтапном методе Рунге–Кутты выбирают один параметр $\sigma = \sigma_2$, тогда $\sigma_1 = 1 - \sigma$. Если положить $a = a_2 = b_{12}$, то двухэтапный метод Рунге–Кутты запишется, как однопараметрическое по σ семейство разностных схем вида:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = (1 - \sigma)K_1 + \sigma K_2,$$

где $K_1 = f(t_n, y_n)$, $K_2 = f(t_n + a\tau, y_n + a\tau f(t_n, y_n))$.

Пример. Рассмотрим примеры разностных схем, являющихся частными случаями общего двухэтапного метода Рунге–Кутты.

1. При $\sigma = 1$, $a = a_2 = 0.5$, $b = b_{21} = 0.5$ мы получим схему Рунге–Кутты «предиктор–корректор» (8), которую мы уже рассматривали. Погрешность этой схемы равна $O(\tau^2)$.
2. Если положить $\sigma = 0.5$, $a = 1$, $b = 1$, то мы получим симметричную разностную схему:

$$\begin{cases} \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = 0.5(f(t_n, y_n) + f(t_n + \tau, y_n + \tau f_n)), & n \in \mathbb{Z}_+ \\ y_0 = u_0. \end{cases} \quad (14)$$

Эта разностная схема является очень эффективной, имеет второй порядок точности по τ и часто используется на практике.

Общая идея m -этапного метода Рунге–Кутты заключается в том, что для вычисления значения приближенного решения в каждой следующей точке t_{n+1} вводятся m дополнительных этапов. Промежуточные значения на каждом шаге $n \in \mathbb{Z}_+$ вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, y_n), \\ K_2 &= f(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau K_1), \\ K_3 &= f(t_n + a_3\tau, y_n + b_{31}\tau K_1 + b_{32}\tau K_2), \\ &\dots \\ K_m &= f(t_n + a_m\tau, y_n + b_{m1}\tau K_1 + b_{m2}\tau K_2 + \dots + b_{mm-1}\tau K_{m-1}). \end{aligned}$$

При этом разностная схема для исходной задачи (1) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \sigma_1 K_1 + \sigma_2 K_2 + \dots + \sigma_m K_m \\ y_0 = u_0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \end{cases} \quad (2)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m \in \mathbb{R}$.

Будем также считать, что выполнено следующее условие аппроксимации, без которого рассмотрение метода не имеет смысла:

$$\sum_{i=1}^m \sigma_i = 1.$$

Пример 1. $m = 3$:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3),$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, y_n), \\ K_2 &= f(t_n + 0.5\tau, y_n + 0.5\tau K_1), \\ K_3 &= f(t_n + \tau, y_n - \tau K_1 + 2\tau K_2). \end{aligned}$$

Данная схема имеет третий порядок точности по τ .

Пример 2. $m = 4$:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, y_n), \\ K_2 &= f(t_n + 0.5\tau, y_n + 0.5\tau K_1), \\ K_3 &= f(t_n + 0.5\tau, y_n + 0.5\tau K_2), \\ K_4 &= f(t_n + \tau, y_n + \tau K_3). \end{aligned}$$

Данная схема имеет четвертый порядок точности по τ .

30. Задача Коши для уравнения колебания струны. Формула Даламбера.

1. Задача Коши для уравнения колебаний струны – это простейшая математическая модель реальных волновых процессов. Под струной понимается одномерная гибкая упругая нить, которую в невозмущенном состоянии можно представить себе как отрезок оси Ox в пространстве $Oxyz$. Можно разными способами возмутить струну:

- изогнуть, а затем отпустить её;
- ударить, сообщив ей некоторый распределённый вдоль неё импульс;
- приложить к струне распределённую вдоль неё силу;
- двигать по определённому закону концы струны;
- приложить силы к её концам

и так далее. В любом случае по струне станут распространяться возмущения – по ней побегут волны. Для описания распространения волн введём вектор $\{u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)\}$, задающий положение в пространстве в момент времени t той точки струны, которая в невозмущённом состоянии имела координаты $(x, 0, 0)$. Рассмотрим простейший случай, когда все возмущения и вызывающие их причины лежат только в плоскости Oxz . Тогда достаточно ввести одну скалярную величину $u(x, t)$ – смещение в направлении оси Oz в момент времени t той точки струны, которая имела в невозмущенном состоянии координату x на оси Ox . Величина u является поперечным смещением в точке x ; не будем рассматривать возможные продольные смещения. Предположим, кроме того, что распространение волн изучается в такой удаленной от концов струны области изменения переменной x и в такие моменты времени t , для которых влиянием режима на концах струны можно пренебречь; в этом смысле будем считать струну бесконечной: $-\infty < x < \infty$.

При деформации струны в ней возникают внутренние упругие силы. Предположение о гибкости струны означает, что эти силы в каждый момент времени направлены по касательным к её профилю. Колебания струны будем считать малыми и

допускающими применение закона Гука. В сделанных предположениях величина T упругой силы не зависит от x и t , а её проекцию на ось Oz можно считать равной $T \cdot u_x(x, t)$. Кроме того, сумма проекций всех сил на ось Ox должна быть равна нулю, поскольку мы рассматриваем только поперечные колебания струны.

Пусть в направлении оси Oz на струну действует распределенная внешняя сила с линейной плотностью $F(x, t)$ (F – сила, приходящаяся на единицу длины). Выделим участок струны $[x_1, x_2]$ и найдем изменение количества движения этого участка в направлении оси Oz в течение времени $[t_1, t_2]$. Если ρ – линейная плотность массы струны (для однородной струны $\rho(x) = \text{const}$), то $\rho \cdot u_t(x, t) \cdot dx$ – импульс её участка длиной dx ; тогда

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \rho \cdot (u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)) \cdot dx = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} T \cdot (u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)) \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

К каждому интегралу в этом равенстве применим формулу среднего значения и разделим равенство на $x_2 - x_1$ и на $t_2 - t_1$. Затем перейдем к пределу при $x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow x$, $t_1 \rightarrow t$, $t_2 \rightarrow t$, предполагая существование у функции $u(x, t)$ непрерывных вторых производных $u_{xx}(x, t)$ и $u_{tt}(x, t)$. Тогда получим

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

где $a^2 = \frac{T}{\rho} = \text{const}$, $f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t)$. Дифференциальное

уравнение (1) второго порядка относительно функции $u(x, t)$ называется уравнением колебаний струны. Это уравнение гиперболического типа. Если $f(x, t) = 0$, то (1) называется уравнением свободных колебаний (на струну не действуют

внешние силы, движение происходит только под влиянием сил упругости).

Задача Коши для уравнения колебаний состоит в нахождении решения (1) при заданных начальном отклонении струны $u(x, 0)$ и её начальной поперечной скорости $u_t(x, 0)$:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (2)$$

2. Классическим решением задачи Коши (2) называется функция $u(x, t)$, определенная и непрерывная вместе со своей первой производной $u_t(x, t)$ в области $-\infty < x < \infty, \quad t \geq 0$, имеющая непрерывные производные $u_{tt}(x, t)$ и $u_{xx}(x, t)$ в области $-\infty < x < \infty, \quad t > 0$, удовлетворяющая уравнению колебаний и заданным начальным условиям.

В силу линейности задачи (2) её решение можно представить в виде суммы решений двух задач:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \quad (3)$$

и

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим сначала задачу (3). Предположим, что существует её классическое решение. Заменой независимых переменных преобразуем уравнение свободных колебаний к его первой канонической форме, содержащей смешанную производную. Для этого запишем дифференциальное уравнение характеристик

$(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$ и найдём его интегралы. $dx - a dt = 0$, $dx + a dt = 0$, поэтому имеем два семейства характеристик: $x - at = C_1 = \text{const}$, $x + at = C_2 = \text{const}$ (на плоскости Oxt это два семейства параллельных прямых). Введём новые переменные $\xi = x - at$, $\eta = x + at$. В результате замены переменных уравнение свободных колебаний преобразуется к виду $U_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0$,

где $U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$. Легко найти общее решение этого уравнения: $U_\xi(\xi, \eta) = \bar{f}(\xi)$,

$$U(\xi, \eta) = \int \bar{f}(\xi) d\xi + f_2(\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \text{ где } f_1 \text{ и } f_2 -$$

произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Вернёмся к прежним переменным:

$$u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at).$$

Последнее равенство означает, что общее решение уравнения свободных колебаний представляет собой сумму волны f_1 , распространяющейся слева направо по оси

Ox со скоростью a , и волны f_2 , распространяющейся с той же

величиной скорости a справа налево. Профили волн f_1 и f_2 со временем не деформируются, поскольку в рассматриваемой модели колебаний не учитывается трение и другие искажающие факторы; происходит только смещение профилей волн со скоростью a вдоль

Ox и их сложение. (Для более реалистического описания колебаний следовало бы учесть, например, силу трения, пропорциональную скорости $u_t(x, t)$.) Выделить конкретное решение уравнения

свободных колебаний можно, например, при помощи начальных условий задачи (3). Определим функции f_1 и f_2 из системы уравнений

$$\begin{cases} u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x), \end{cases} \quad -\infty < x < \infty, \quad (5)$$

где штрих означает производную по полному аргументу функции одной переменной. Интегрируя второе уравнение, получаем

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ -f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + C, \quad C = \text{const.} \end{cases}$$

Отсюда

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz - \frac{C}{2},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + \frac{C}{2}.$$

Следовательно,

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz. \quad (6)$$

(6) называется формулой Даламбера.

3. Теорема существования и единственности классического решения задачи Коши. Пусть в (3) функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема при $-\infty < x < \infty$. Тогда классическое решение задачи (3) существует, единственно и определяется формулой Даламбера (6).

Доказательство. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы, то непосредственной проверкой устанавливаем, что заданная формулой (6) функция $u(x, t)$ является классическим решением задачи (3). Система (5) определяет вид решения (6) однозначно. $\square$

Рассмотрим наряду с задачей (3) задачу

$$\begin{cases} \tilde{u}_{xx}(x, t) = a^2 \tilde{u}_{xx}(x, t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{u}_t(x, 0) = \tilde{\psi}(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (7)$$

Теорема об устойчивости решения задачи Коши. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что если функции $\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}$ в задачах (3) и (7) удовлетворяют неравенствам

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| < \delta, \quad \sup_{-\infty < x < \infty} |\psi(x) - \tilde{\psi}(x)| < \delta, \quad (8)$$

то решения задач (3) и (7) удовлетворяют неравенству

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| < \varepsilon \quad (9)$$

при $0 \leq t \leq t_0$.

Доказательство. Из формулы Даламбера (6) следует неравенство

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| &\leq \frac{1}{2} |\varphi(x - at) - \tilde{\varphi}(x - at)| + \\ &+ \frac{1}{2} |\varphi(x + at) - \tilde{\varphi}(x + at)| + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi(z) - \tilde{\psi}(z)| dz. \end{aligned}$$

Тогда из (8) получаем

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a} \cdot 2at \cdot \delta = \delta \cdot (1 + t).$$

Если решения задач (3) и (7) рассматриваются только на отрезке времени $0 \leq t \leq t_0$, то на этом отрезке времени выполнено

неравенство (9), если $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 + t_0}$. $\square$

Существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши (3) означают, что эта задача корректно поставлена.

4. Решим задачу (4) для неоднородного уравнения.

Теорема. Пусть функция $f(x, t)$ в (4) непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ в области $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$. Тогда задача (4) имеет единственное классическое решение

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (10)$$

Доказательство. Найдём $u_x(x, t)$ и $u_{xx}(x, t)$, дифференцируя зависящий от параметра x интеграл (10) по формуле Лейбница:

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(f(\xi, \tau) \Big|_{\xi=x+a(t-\tau)} - f(\xi, \tau) \Big|_{\xi=x-a(t-\tau)} \right) d\tau,$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(\frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x+a(t-\tau)} - \frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x-a(t-\tau)} \right) d\tau.$$

Найдём $u_t(x, t)$ и $u_{tt}(x, t)$, дифференцируя зависящий от параметра t интеграл (10) по формуле Лейбница:

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left(f(\xi, \tau) \Big|_{\xi=x+a(t-\tau)} + f(\xi, \tau) \Big|_{\xi=x-a(t-\tau)} \right) d\tau,$$

$$u_{tt}(x, t) = f(x, t) + \frac{a}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x+a(t-\tau)} - \frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x-a(t-\tau)} \right) d\tau.$$

Подставляя полученные выражения производных $u_{tt}(x, t)$ и $u_{xx}(x, t)$ в уравнение, а $u(x, t)$ и $u_t(x, t)$ – в начальные условия задачи (4), убеждаемся в том, что (10) является решением задачи Коши (4). Если бы существовали два различных решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задачи (4), то функция $w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ удовлетворяла бы задаче

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) = a^2 w_{xx}(x, t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = 0, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Но по теореме единственности решения последней задачи нет решений, отличных от $w(x, t) \equiv 0$. $\square$

При выполнении условий теорем существования и единственности классических решений задач (3) и (4) получаем классическое решение задачи (2) в виде формулы Даламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

5. Требования к заданным функциям φ , ψ , f могут быть ослаблены, если решение задачи Коши понимать в некотором обобщенном смысле.

Пример. Если в задаче (3) $\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$ а

$\psi(x) \equiv 0$, то классического решения этой задачи не существует. Но можно построить решение в смысле предела классических решений. Для этого выберем последовательность достаточно гладких функций

$\varphi_n(x)$, равномерно сходящуюся к $\varphi(x)$ на $-\infty < x < \infty$. Найдём классические решения $u_n(x, t)$ задач Коши с начальными данными φ_n , ψ . Решением исходной задачи назовём $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t)$. Такое решение для заданных φ и ψ можно получить по формуле Даламбера (6). □

Пример. Если в задаче (3) $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) = \begin{cases} V = \text{const} \neq 0, & |x| \leq l, \\ 0, & |x| > l, \end{cases}$ то классического решения этой

задачи не существует. (Такие начальные условия означают, что в начальный момент времени струне был ударом передан равномерно распределённый на $|x| \leq l$ импульс $I = 2l\rho V$.)

Последовательность гладких функций $\psi_n(x)$ не может равномерно сходиться к разрывной функции $\psi(x)$. Поэтому надо выбрать последовательность $\psi_n(x)$, сходящуюся к $\psi(x)$ в более слабом смысле, например, $\int_a^b |\psi_n(x) - \psi(x)| dx \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого отрезка $[\alpha, \beta]$. Найдём классические решения $u_n(x, t)$ задач Коши с начальными данными φ, ψ_n и в качестве решения исходной задачи с начальными данными φ, ψ возьмём $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t)$. Для заданных φ и ψ это решение можно получить по формуле Даламбера (6). $\square$

Пример. Если в начальный момент времени струне был передан сосредоточенный в точке $x = 0$ импульс I , а $\varphi(x) \equiv 0$, то в постановке задачи Коши содержится δ -функция: $u_i(x, 0) = \frac{I}{\rho} \delta(x)$. Поскольку в условиях задачи присутствует обобщённая функция, её решение надо понимать в обобщённом смысле. Это решение можно построить по формуле Даламбера (6). $\square$

31. Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности. Метод разделения переменных для решения первой краевой задачи.

1. Краевые задачи для уравнения теплопроводности представляют собой математические модели процессов распространения тепла. Для описания этих процессов в пространственном теле D введём температуру $u(M, t)$ в точке $M(x, y, z) \in D$ (x, y, z – декартовы координаты) в момент времени t . Если температура в разных точках тела различна, то в нём возникают потоки тепла (тепловой энергии), направленные из областей с высокой температурой к областям с меньшей температурой. Поток тепла через элемент площади поверхности dS называется количеством тепла, пересекающего dS за единицу времени. Его можно охарактеризовать вектором плотности теплового потока $\vec{W}(M, t)$: если $\vec{n}$ – единичная внешняя нормаль к dS , то поток тепла через dS равен $(\vec{W}, \vec{n})dS$. По закону Фурье в изотропной среде $\vec{W} = -k \text{grad}_M u$, где коэффициент теплопроводности среды $k > 0$. Если среда неоднородна, то $k = k(M)$. Выделим произвольную пространственную область $D' \subset D$, ограниченную замкнутой кусочно гладкой поверхностью S' . Пусть $\rho(M)$ – объёмная плотность массы вещества, $C(M)$ – его удельная теплоёмкость, а $F(M, t)$ – объёмная плотность мгновенных тепловых источников. Запишем баланс тепла для области D' в промежутке времени $[t_1, t_2]$:

$$\begin{aligned} & \iiint_{D'} C(M) \rho(M) [u(M, t_2) - u(M, t_1)] dx dy dz = \\ & = - \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{S'} (\vec{W}, \vec{n}) dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{D'} F(M, t) dx dy dz. \end{aligned}$$

По формуле Остроградского

$$\iint_{S'} (\vec{W}, \vec{n}) dS = \iiint_{D'} \operatorname{div}_M \vec{W} dx dy dz.$$

Предположим, что функция

$u(M, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x, y, z и непрерывно дифференцируема по t . Из закона Фурье $\operatorname{div}_M \vec{W} = -\operatorname{div}_M (k \cdot \operatorname{grad}_M u)$, и тогда баланс тепла запишется в виде

$$\begin{aligned} & \iiint_{D'} C(M) \rho(M) \{u(M, t_2) - u(M, t_1)\} dx dy dz = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{D'} \operatorname{div}_M (k \cdot \operatorname{grad}_M u) dx dy dz + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{D'} F(M, t) dx dy dz. \end{aligned} \quad (1)$$

К каждому из интегралов $\int_{t_1}^{t_2}$ и $\iiint_{D'}$ в (1) применим формулу среднего значения, затем разделим равенство (1) на объем области D' и на $t_2 - t_1$; выполним предельный переход, стягивая область D' в точку M и устремляя $t_1 \rightarrow t, t_2 \rightarrow t$. В силу предположения о существовании у функции $u(M, t)$ указанных выше непрерывных производных получим

$$\begin{aligned} C(M) \rho(M) u_t(M, t) &= \\ &= \operatorname{div}_M (k(M) \cdot \operatorname{grad}_M u(M, t)) + F(M, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение (2) относительно функции $u(M, t)$ называется уравнением теплопроводности. Это уравнение параболического типа. Если $C = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, $k = \text{const}$, то уравнение (2) имеет вид

$$u_t(M, t) = a^2 \cdot \Delta_M u(M, t) + f(M, t), \quad (3)$$

где $\Delta_M u = \operatorname{div}_M \operatorname{grad}_M u(M, t)$ – оператор Лапласа, $a^2 = \frac{k}{C\rho}$,

$$f(M, t) = \frac{F(M, t)}{C\rho}.$$

Замечание. Уравнение теплопроводности обладает некоторым «дефектом» описания реальных процессов распространения тепла. Согласно этому уравнению, если в точке M_0 сработает мгновенный точечный источник, то есть в M_0 мгновенно выделится конечное количество тепла, то изменение температуры во всей области D произойдет немедленно: для сколь угодно малого промежутка времени после срабатывания этого источника обусловленное им изменение температуры всюду отлично от нуля. Это значит, что «сигнал» о срабатывании источника в данной модели распространяется с бесконечной скоростью. Такая грубость математической модели происходит из феноменологического закона Фурье, который не учитывает, что тепловая энергия в действительности является энергией движущихся частиц. Вопрос о пригодности уравнения теплопроводности сводится в сущности к вопросам об исходных для данной модели предположениях и о точности описания ею реальных процессов. Более последовательной моделью является интегро-дифференциальное уравнение переноса.

2. Для однозначного определения процесса распространения тепла надо выделить некоторое конкретное решение уравнения теплопроводности. С этой целью к уравнению следует добавить дополнительные условия. Такими условиями являются, например, начальное условие, определяющее температуру во всех точках тела в начальный момент времени, и краевое условие. Так как уравнение содержит только первую производную по времени, то начального условия достаточно лишь одного.

Если известно, что граница $\bar{S}$ области D поддерживается при заданной температуре, то $u(P, t) = \mu(P, t)$, $P \in S$, $t \geq 0$, где $\mu(P, t)$ – заданная функция. Это условие называется **краевым условием первого рода** или **условием Дирихле**.

Если на поверхности S известен тепловой поток, то $-k(P) \frac{\partial u(P, t)}{\partial n} = (\vec{W}(P, t), \vec{n})$, $P \in S$, $t \geq 0$, где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к поверхности S в точке P . Это условие можно записать в виде $\frac{\partial u(P, t)}{\partial n} = v(P, t)$, где $v(P, t)$ – заданная при $P \in S$, $t \geq 0$ функция. Его называют **краевым условием второго рода** или **условием Неймана**.

В краевом условии можно учесть обмен теплом между телом D и внешней средой. Если известна температура внешней среды $u_{\text{среды}}(P, t)$, $P \in S$, $t \geq 0$, то по закону Ньютона обусловленный теплообменом поток тепла через элемент границы dS пропорционален $(u(P, t) - u_{\text{среды}}(P, t))dS$. Если на границе S действуют ещё и распределённые по ней источники тепла, то они создают дополнительные потоки тепла через S . В результате приходим к краевому условию третьего рода:
$$\frac{\partial u(P, t)}{\partial n} + h(P)u(P, t) = \eta(P, t), \quad P \in S, \quad t \geq 0,$$
 где $h(P) > 0$ и $\eta(P, t)$ – заданные функции.

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности состоит в нахождении решения $u(M, t)$ уравнения (2) в открытой области $D \times \{t > 0\}$, которое удовлетворяет начальному условию $u(M, 0) = \varphi(M)$, $M \in \bar{D} = D \cup S$, и краевому условию вида
$$\alpha(P)\frac{\partial u(P, t)}{\partial n} + \beta(P)u(P, t) = \chi(P, t), \quad P \in S, \quad t \geq 0,$$
 ($\alpha + \beta > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$).

Определение. Классическим решением начально-краевой задачи называется функция $u(M, t)$, которая удовлетворяет следующим требованиям:

- $u(M, t)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D} \times \{t \geq 0\}$;
- $u(M, t)$ имеет непрерывные производные u_x, u_y, u_z в замкнутой области $\bar{D} \times \{t \geq 0\}$;
- $u(M, t)$ имеет непрерывные производные $u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}$ в открытой области $D \times \{t > 0\}$ и удовлетворяет в ней уравнению теплопроводности;
- $u(M, t)$ принимает заданные значения $\varphi(M)$ в $\bar{D}$ при $t = 0$;

– $u(M, t)$ удовлетворяет краевому условию на границе S при $t \geq 0$.

Требование непрерывности решения в замкнутой области $\bar{D} \times \{t \geq 0\}$ существенно, так как при невыполнении его нет единственности решения задачи.

Достаточно требовать непрерывности производных u_x, u_y, u_z лишь в тех точках P границы S , где $\alpha(P) \neq 0$.

Для существования классического решения задачи необходимы непрерывность заданных функций $C(M), \rho(M), k(M), F(M, t), \varphi(M), \alpha(P), \beta(P), \chi(P, t)$ и согласование начального и краевого условий:

$$\alpha(P) \frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} + \beta(P) \varphi(P) = \chi(P, 0), \quad P \in S.$$
 Однако, часто возникают задачи, решения которых не могут удовлетворять требованиям, предъявляемым к классическим решениям. Например, может не выполняться согласование начального и краевого условий; заданные в задаче функции могут оказаться разрывными. В таких случаях решение надо понимать в некотором обобщенном смысле.

Далее будем рассматривать начально-краевые задачи для уравнения (3). В случае $f(M, t) = 0$ можно доказать, что в любой открытой области изменения переменных x, y, z, t решение уравнения $u_t = a^2 \Delta u$ бесконечно дифференцируемо и аналитично по переменным x, y, z .

Если областью D является всё пространство R^3 , то граница S отсутствует, краевого условия нет, имеется только начальное условие. Для единственности решения задачи следует потребовать непрерывности и ограниченности функций $u(M, t)$ в области $R^3 \times \{t \geq 0\}$. Такая задача называется задачей Коши.

3. Рассмотрим процесс теплопроводности в стержне. Направим ось Ox вдоль стержня и предположим, что температура $u(x, t)$ не зависит от координат y и z . Предположение об

одномерности процесса передачи тепла означает, что в каждый момент времени изотермические сечения стержня совпадают с его поперечными сечениями; кроме того, все поперечные сечения стержня одинаковы и имеют площадь σ . Из баланса тепла для произвольного отрезка $[x_1, x_2]$ стержня в промежутке времени $[t_1, t_2]$

$$\begin{aligned} & \sigma \cdot \int_{x_1}^{x_2} C(x) \rho(x) (u(x, t_1) - u(x, t_2)) dx = \\ & = \sigma \cdot \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_2} - \left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_1} \right] dt + \\ & + \sigma \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx \end{aligned} \quad (4)$$

получаем дифференциальное уравнение теплопроводности

$$C(x) \rho(x) u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + F(x, t).$$

Для однородного стержня оно имеет вид

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t). \quad (5)$$

В балансе тепла (4) можно учесть обмен теплом между стержнем и окружающей его средой через боковую поверхность стержня. (Если такого обмена теплом нет, то боковая поверхность стержня называется теплоизолированной.) Пусть p – периметр поперечного сечения стержня, $\gamma > 0$ – коэффициент теплообмена между поверхностью стержня и окружающей его средой. Для учета указанного теплообмена по закону Ньютона к правой части (4)

следует прибавить член $-\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} \gamma \cdot (u(x, t) - u_{\text{среды}}) p \cdot dx$. Тогда

вместо уравнения (5) получим

$$u_t = a^2 u_{xx} - b \cdot (u - u_{\text{среды}}) + f(x, t), \quad (6)$$

где $b = \frac{\gamma \cdot P}{\sigma \cdot C \cdot \rho} = \text{const}$. Если выполнить замену искомой функции

$u(x, t) = e^{-bt} \cdot v(x, t) + u_{\text{среды}}$, то для новой функции $v(x, t)$ получим уравнение вида (5).

В одномерном случае роль области D играет интервал $0 < x < l$ (l – длина стержня), а ее граница S содержит только две точки $x = 0$ и $x = l$. Начально-краевая задача состоит в нахождении решения уравнения (5) в области $0 < x < l$, $t > 0$, которое удовлетворяет начальному условию $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$, и двум краевым условиям при $x = 0$ и при $x = l$. Если краевые условия имеют вид $u(0, t) = \mu_1(t)$, $u(l, t) = \mu_2(t)$, $t \geq 0$, то говорят о первой краевой задаче. В случае краевых условий $u_x(0, t) = \nu_1(t)$, $u_x(l, t) = \nu_2(t)$, $t \geq 0$, получаем вторую краевую задачу. В случае краевых условий $u_x(0, t) - h_1 \cdot u(0, t) = \eta_1(t)$, $u_x(l, t) + h_2 \cdot u(l, t) = \eta_2(t)$, $t \geq 0$, $h_1 = \text{const} > 0$, $h_2 = \text{const} > 0$, получаем третью краевую задачу. Возможны смешанные краевые задачи с различными комбинациями краевых условий.

Если изучается распределение температуры стержня вдали от его концов и в тот период времени, за который краевые условия не успеют существенно повлиять на температуру, то получаем задачу Коши для уравнения (5) в области $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$ с начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$, $-\infty < x < +\infty$. В ней следует требовать непрерывности и ограниченности решения. Возможна другая предельная задача: краевое условие на левом конце сказывается на температуре рассматриваемого участка стержня, а краевое условие на правом конце – нет. Тогда получаем задачу для уравнения (5) в области $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$ с начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x < +\infty$, и одним краевым условием какого-либо из рассмотренных типов.

Замечание. Начальные данные в рассмотренных задачах ставятся на характеристике $t = 0$ уравнения (5).

4. Теорема (принцип максимума). Решение однородного уравнения теплопроводности $u_t = a^2 \Delta u$, непрерывное в замкнутой области $\bar{D} \times \{0 \leq t \leq T\}$, внутри этой области не может принимать значения, большие, чем его значения при $t = 0$ или на границе S области D .

Теорема. Пусть функции $u_1(M, t)$ и $u_2(M, t)$ удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности $u_t = a^2 \Delta u$, непрерывны в замкнутой области $\bar{D} \times \{0 \leq t \leq T\}$ и связаны неравенствами $|u_1(M, 0) - u_2(M, 0)| \leq \varepsilon$, $M \in \bar{D}$, и $|u_1(P, t) - u_2(P, t)| \leq \varepsilon$, $P \in S$, $0 \leq t \leq T$. Тогда $|u_1(M, t) - u_2(M, t)| \leq \varepsilon$ во всех точках замкнутой области $\bar{D} \times \{0 \leq t \leq T\}$.

Из сформулированных теорем вытекает, что первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(M, t), & M \in D, 0 < t \leq T, \\ u(M, 0) = \varphi(M), & M \in D, \\ u(P, t) = \mu(P, t), & P \in S, 0 \leq t \leq T; \\ \varphi(P) = \mu(P, 0), & P \in S, \end{cases} \quad (7)$$

может иметь только одно классическое решение, и что это классическое решение устойчиво по начальным и граничным данным.

Существование решения задачи (7) можно получить, построив каким-либо методом (например, методом разделения переменных) ее формальное решение и доказав затем, что оно является классическим решением этой задачи.

Существование, единственность и устойчивость классического решения первой начально-краевой задачи (7) означают, что эта задача корректно поставлена.

5. Построим формальное решение первой начально-краевой задачи на отрезке:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + \tilde{f}(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), & t \geq 0; \\ \tilde{\varphi}(0) = \mu_1(0), \quad \tilde{\varphi}(l) = \mu_2(0). \end{cases} \quad (8)$$

Выполним замену искомой функции:

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{x}{l} \cdot (\mu_2(t) - \mu_1(t)) + \mu_1(t).$$

Тогда относительно $v(x, t)$ получим задачу вида

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Решение задачи (9) можно представить суммой решений двух задач:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (10)$$

и

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (11)$$

Задачу (10) решим методом **разделения переменных**. Идея этого метода состоит в том, что нетривиальные частные решения данного уравнения ищутся в виде произведения $X(x) \cdot T(t)$, где X зависит только от x , а T — только от t . Это сводит задачу для уравнения в частных производных к некоторой совокупности задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Сначала найдем частные решения уравнения $v_t = a^2 v_{xx}$ вида $X(x) \cdot T(t)$, которые удовлетворяют краевым условиям задачи (10). Если подставить произведение $X(x) \cdot T(t)$ в уравнение и разделить его на $a^2 \cdot X(x) \cdot T(t)$, то получим равенство

$$\frac{X''_{xx}(x)}{X(x)} = \frac{T'_t(t)}{a^2 T(t)},$$

левая часть которого зависит только от x , а правая – только от t . Поскольку x и t являются независимыми переменными, равенство возможно только если обе его части равны постоянной. Обозначим эту действительную постоянную через $(-\lambda)$ и запишем отдельно два уравнения относительно $X(x)$ и $T(t)$:

$$X''_{xx}(x) + \lambda \cdot X(x) = 0; \quad T'_t(t) + a^2 \cdot \lambda \cdot T(t) = 0.$$

Подставим теперь произведение $X(x) \cdot T(t)$ в краевые условия задачи (10), которые должны выполняться при всех $t \geq 0$. Отсюда $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Чтобы найти интересующие нас функции $X(x)$, надо решить краевую задачу Штурма-Лиувилля на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения относительно $X(x)$:

$$\begin{cases} X''_{xx} + \lambda \cdot X(x) = 0, & 0 < x < l, \\ X(0) = 0, & X(l) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Легко проверить, что при $\lambda \leq 0$ задача (12) не имеет нетривиальных решений. При $\lambda > 0$ общим решением уравнения задачи (12) является

$$X(x) = B \cdot \sin \sqrt{\lambda} x + G \cdot \cos \sqrt{\lambda} x, \quad B = \text{const}, \quad G = \text{const}.$$

Из краевых условий получаем бесконечную последовательность собственных значений $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, каждому из

которых отвечает одна собственная функция $X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$ (с

точностью до ненулевого постоянного множителя). Уравнение для $T(t)$ надо решать при $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$; его общее решение

$$T_n(t) = A_n \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot t\right\}, \quad A_n = \text{const}. \quad \text{В силу линейности}$$

задачи (10) $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t)$ будет удовлетворять уравнению в частных производных и краевым условиям:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot t\right\} \quad (13)$$

– удовлетворяющее краевым условиям общее решение однородного уравнения теплопроводности.

Система найденных собственных функций

$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$ ортогональна на отрезке $0 \leq x \leq l$ в смысле скалярного произведения

$$(X, Y) = \int_0^l X(x) \cdot Y(x) dx, \quad \|X_n\|^2 = \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = \frac{l}{2}.$$

Предположим, что функция $\varphi(x)$ в (10) представима рядом Фурье по системе найденных функций $X_n(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (14)$$

где $\varphi_n = \frac{(\varphi, X_n)}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx$ – коэффициенты

Фурье заданной функции φ . Тогда из начального условия задачи (10) и равенства (14) однозначно определяются коэффициенты A_n того решения $v(x, t)$ в (13), которое удовлетворяет начальному условию: $A_n = \varphi_n$.

Докажем теперь, что формально построенное решение задачи (10) является классическим решением.

Теорема о существовании классического решения. Пусть функция $\varphi(x)$, заданная в начальном условии задачи (10), непрерывна на отрезке $0 \leq x \leq l$ и имеет кусочно непрерывную производную на этом отрезке. Пусть $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда задача (10) имеет классическое решение, представимое рядом

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot t\right\}. \quad (15)$$

Доказательство. Надо доказать, что сумма ряда (15) в открытой области $0 < x < l$, $t > 0$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности, а в замкнутой области $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ является непрерывной функцией. Ряд (15) мажорируется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|, \text{ который сходится в силу того, что } \varphi(x) \text{ непрерывна и}$$

имеет кусочно непрерывную производную. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд (15) сходится равномерно в замкнутой области $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$, а его сумма является непрерывной в этой замкнутой области функцией. Покажем, что при $t \geq \bar{t} > 0$ равномерно сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial x^2} \quad (16)$$

$$\text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t}, \quad (17)$$

$$\text{где} \quad u_n(x, t) = \varphi_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot t\right\}. \quad \text{Из}$$

непрерывности функции $\varphi(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq l$ имеем

$$|\varphi_n| = \frac{2}{l} \left| \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx \right| \leq 2M,$$

где $M = \max_{0 \leq x \leq l} |\varphi(x)|$. Тогда при $t \geq \bar{t}$ выполнены неравенства

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| \leq 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot \bar{t}\right\}$$

и

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| \leq 2M \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 n^2 \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 \cdot \bar{t} \right\}.$$

Поэтому ряды (16) и (17) мажорируются рядами

$$2M \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 \cdot \bar{t} \right\}$$

и

$$2M \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 \cdot \bar{t} \right\}$$

соответственно, которые сходятся по признаку Даламбера. Отсюда следует, что ряд (15) можно дифференцировать почленно в области $0 < x < l$, $t > 0$. □

Решение задачи (11) можно искать в виде ряда Фурье $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \cdot \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right)$, где коэффициенты Фурье $V_n(t)$ подлежат определению из неоднородного уравнения задачи (11) и ее нулевого начального условия. Разложим $f(x, t)$ при каждом фиксированном t в ряд Фурье: $f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right)$, где

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \cdot \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right) dx \quad (\text{здесь } t \text{ играет роль параметра}).$$

Для нахождения $V_n(t)$ надо сравнить коэффициенты при $\sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right)$ в уравнении и в начальном условии. Тогда для определения $V_n(t)$ получаем задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} V_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot V_n(t) = f_n(t), & t > 0, \\ V_n(0) = 0; & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Как и в случае задачи (10), формально построенное решение задачи (11) требует обоснования.

6. Задача. Начальная температура однородного шара радиуса R равна $u_0 = \text{const} \neq 0$. Во все моменты времени $t > 0$ его поверхность поддерживается при нулевой температуре. Найти температуру внутри шара при $t > 0$.

Решение. В задаче отсутствует согласование начального и краевого условий, поэтому ее решение не является классическим. Очевидно, что решение $u(M, t)$ в каждый момент времени t зависит только от расстояния r от центра шара. Выберем сферическую систему координат с началом в центре шара. В случае сферической симметрии

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}.$$

Имеем первую начально-краевую задачу в шаре:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}, & 0 \leq r < R, \quad t > 0, \\ u(r, 0) = u_0, & 0 \leq r \leq R, \\ u(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Введем новую искомую функцию $v(r, t) = r \cdot u(r, t)$. Умножая исходное уравнение на r , получаем задачу на отрезке:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{rr}, & 0 < r < R, \quad t > 0, \\ v(r, 0) = r \cdot u_0, & 0 \leq r \leq R, \\ v(0, t) = 0, \quad v(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Решаем последнюю задачу методом разделения переменных:

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{R} r\right) \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t\right\},$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{R} \int_0^R r \cdot u_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{R} r\right) dr = 2u_0 \cdot R \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

$$u(r, t) = \frac{1}{r} v(r, t).$$